Atelier SA1

Via Math

2021

Atelier SA1: Simuler une épidémie

En utilisant ce modèle d'épidémie que vous clonerez, simulez une épidémie sur 30 jours avec une population initiale de 100 personnes susceptibles (S(0)=100), et 1 personne infectée (I(0)=1). On supposera une force d'infection de 0,006 et un taux de rémission de 0,1. Faites afficher les résultats sous formes de graphique et de table de valeurs.

1. Quelle relation lie en tout temps les valeurs des variable S(t), I(t) et R(t)?

   Vous pouvez la faire apparaître plus clairement en modifiant la représentation graphique (bouton *Configure*) du mode *Line* à *Area*.

2. Pouvez-vous l'expliquer à partir des flux associés à ce modèle de l'épidémie?

3. On va maintenant étudier la vitesse de propagation de l'épidémie. En faisant sortir les résultats sous forme de table de valeurs, complétez le tableau suivant :

t (en jours)	**I(t)**
0	1
	2
	3
	4
	6
	8
	9

   (a) Combien de temps s'écoule avant que le nombre de personnes infectées double? Est-ce toujours le cas?

   (b) Combien de temps s'écoule avant que le nombre de personnes infectées triple? Est-ce toujours le cas?

   (c) À quelle fonction pourriez-vous associer la relation entre le temps écoulé et le nombre de patients infectés, tout au moins pour la durée du temps associé à ce premier tableau ?

(d) Et si l'on réduisait à 0 le taux de rémission, en utilisant le «Slider» à votre droite, pouvez-vous deviner à quoi ressemblerait le graphique de cette relation? Esquissez-le, puis faites-en la simulation pour comparer.

(e) Pouvez-vous expliquer les résultats de cette nouvelle simulation ?

Examinons les relations entre les variables, à partir des flux que nous avons construits. Nous avons ici un modèle continu, où les flux peuvent être associés à une dérivée : positive s'ils sont entrants, et négative s'ils sont sortants.

4. On peut penser qu'un modèle discret est plus approprié pour modéliser une épidémie, car après tout, les personnes se comptent en valeurs entières. Quelle peut être la raison de s'intéresser à un modèle continu dans ce contexte?

5. Si l'on note respectivement par α et γ la force d'infection et le taux de rémission, complétez le **MODÈLE 1**, ci-dessous, constitué de trois *équations différentielles* :

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= -\alpha S I \\ \frac{dI}{dt} &= \\ \frac{dR}{dt} &= +\gamma I \end{aligned}} \tag{1}$$

Équation différentielle

Une **équation différentielle** est une équation où les inconnues sont des fonctions; elle se présente sous la forme d'une relation entre ces fonctions inconnues et leurs dérivées.

6. En analysant mathématiquement l'expression que vous avez donnée pour $\frac{dI}{dt}$:

(a) Pourquoi est-il possible d'associer pour les premiers jours la fonction $I(t)$ à un modèle « quasi-exponentiel »?

(b) Pourquoi ce modèle cesse-t-il d'être applicable au fur et à mesure de la propagation de l'épidémie, même avec une valeur nulle pour γ ?

(c) Comment peut-on expliquer l'effet d'une augmentation du paramètre γ sur la courbe de $I(t)$?

Il est important de préciser que, tout comme nous, le logiciel ne connaît pas à *priori* les fonctions S(t), I(t) et R(t). Pour en générer les courbes dans une simulation, il résout le système d'équations plus haut en passant par une discrétisation du modèle continu. Pour illustrer comment, réécrivons la première équation comme suit :

$$\frac{S(t+\Delta t)-S(t)}{\Delta t} \approx -\alpha S(t)I(t)$$

En isolant $S(t+\Delta t)$, et en appliquant le même procédé pour $I(t+\Delta t)$ et $R(t+\Delta t)$ on obtient trois nouvelles équations (à compléter!):

$$\begin{aligned} S(t+\Delta t) &\approx S(t) - \alpha S(t)I(t)\cdot\Delta t \\ I(t+\Delta t) &\approx \\ R(t+\Delta t) &\approx R(t) + \gamma I(t)\cdot\Delta t \end{aligned}$$

Ces trois équations constituent ensemble une version discrétisée du Modèle 1. Elles se présentent sous la forme de **relations de récurrence**, ce qui permet de les utiliser pour générer facilement des suites qui pourront remplir les tables de valeurs pour les fonctions S(t), I(t) et R(t). Voyons comment.

Supposons qu'on connaît les valeurs de S, I et R pour un temps de départ $t = t_0$, c'est à dire $S(t_0)$, $I(t_0)$ et $R(t_0)$, ainsi que les valeurs des paramètres α et γ . En choisissant un pas de temps relativement petit (par exemple $\Delta t = 0,1$) et en considérant une nouvelle valeur de temps $t_1 = t_0 + \Delta t$, on peut calculer à partir des équations ci-haut des valeurs approchées pour $S(t_1)$, $I(t_1)$ et $R(t_1)$. À partir de ces valeurs, en considérant à présent $t_2 = t_1 + \Delta t$, on peut calculer $S(t_2)$, $I(t_2)$ et $R(t_2)$, et ainsi de suite, pour autant de valeurs de temps nécessaires pour parcourir la durée de la simulation.

La table de valeurs ci-dessous illustre la dynamique entrecroisée de cette construction, en partant de $t_0 = 2$, avec $S(t_0) = S(2) = 100$, $I(t_0) = I(2) = 1$, $R(t_0) = R(2) = 0$ et en avançant à chaque itération (i) de $\Delta t = 0,1$, avec $\alpha = 0,006$ et $\gamma = 0,1$.

i	t_i	$S(t_i)$	$I(t_i)$	$R(t_i)$
0	2	100	1	0
1	2,1	99,94	1,05	0,01
2	2,2	99.8770378	1,1024622	0,0205
3	2,3			

Ainsi, la résolution de notre système d'équations différentielles par simulation se construit comme un film, une image à la fois, et l'on essaie d'avoir assez d'images pour ne pas trahir la continuité du mouvement. Ici, la construction de chaque nouvelle image pour chacune des fonctions est très simple, car elle n'implique qu'un même calcul arithmétique sur les valeurs des fonctions construites au temps précédent. Ça peut donc se faire aisément sur un tableur, comme le montre le fichier Excel ÉPIDÉMIE.

Nous venons d'appliquer la **méthode d'Euler** à un système d'équations différentielles, et c'est l'une des deux méthodes offertes par Insight Maker pour simuler un phénomène modélisé par stocks et flux (voir l'option « Settings »).

La méthode d'Euler

La **méthode d'Euler** est une méthode numérique qui permet de trouver de façon approchée (par approximations) la fonction-solution d'une équation différentielle qu'on ne peut résoudre avec des méthodes analytiques. Dans le cas le plus simple, elle permet de résoudre une équation différentielle de la forme :

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y)$$

pour laquelle la fonction $f(x,y)$ est connue et la fonction $y(x)$ qui vérifie l'équation est l'inconnue que l'on cherche. La fonction $f(x,y)$ peut dépendre de la variable x, de la variable y ou des deux variables à la fois. (Si f ne dépend que de x, trouver $y(x)$ équivaut à intégrer f par rapport à x.)

La méthode consiste à discrétiser l'équation différentielle, en approximant la dérivée en x de la fonction $y(x)$ (associée à la pente de la tangente de sa courbe) par le taux de variation de la fonction entre les points d'abscisses x et $x + \Delta x$ (associé à la pente de la sécante entre les deux points) :

$$\frac{y(x+\Delta x) - y(x)}{\Delta x} \approx f(x,y)$$

En isolant $y(x + \Delta x)$, on obtient une relation de récurrence:

$$y(x+\Delta x) \approx y(x) + f(x,y) \cdot \Delta x$$

Si l'on dispose pour la fonction $y(x)$ d'un couple initial $(x_0, y_0) = (x_0, y(x_0))$, il suffira d'appliquer de façon successive ce calcul arithmétique pour générer, de façon approchée, une suite de points (x,y), distants de Δx en abscisse, et associés à la fonction $y(x)$ solution de cette équation différentielle.

La qualité de la solution ainsi générée dépend de la petitesse du pas pour la variable indépendante. Plus Δx est petit, plus on peut suivre de près la fonction solution, et simuler correctement le phénomène, s'il se produit réellement de façon continue.

7. Examinons l'effet de la taille du pas de temps (Δt) sur les résultats produits par différentes simulations de notre épidémie sur 10 jours, en gardant à 0 le taux de rémission. Faites trois simulations en appliquant successivement, dans les paramètres de la simulation (« Settings »), les valeurs de 1, 0,1 et 0,01 pour Δt (« dt »).

t	***I(t)***		
	$\Delta t = 1$	$\Delta t = 0,1$	$\Delta t = 0,01$
1			
5			
10			

Que se passe-t-il avec l'allure de la courbe pour $\Delta t = 1$?

8. ***DÉFI :*** Pourriez-vous jouer avec la valeur de la force d'infection de façon à obtenir à peu près la même valeur pour $I(10)$, pour deux simulations utilisant des valeurs différentes pour le pas de temps?

t	***I(t)***	
	$\Delta t = 1$; $\alpha = ...$	$\Delta t = 0,1$; $\alpha = 0,006$
1		
5		
10		

(a) Obtenez-vous la même valeur pour $I(5)$? et $I(20)$?

(b) Laquelle des deux simulations vous semble la plus exacte? Pourquoi?

(c) Quel est le problème avec l'autre? Surestime-t-elle? Sous-estime-t-elle? Ou fait-elle un peu des deux? Expliquez.